翰林數學

新屋高中 / 王保堤 老師

# 三角函數+指對數

## 暑期加強．實力衝接

翰林 相信學習 Believe in Learning

一升二 衝接使用

# 目次 Contents

## 三角比銜接三角函數



## 指對數銜接

# 焦點 1

範圍 第二冊／三角比

內容 直角三角形的邊角關係

## 重點整理

**1.** 學習三角函數的目的：可以讓我們用「**實際可測量**」的「距離或角度」，去「**推算**」**目標物**的大小，甚至推估我們不便或無法實際到達的地方的位置。

**2.** 必備的基礎能力：①**畢式**（勾股）**定理**：$c^2=a^2+b^2$；②大角對大邊，小角對小邊。

**3.** **相似**三角形概念：**直角三角形**中，只要某一個「**銳角**」角度固定，不論此三角形的邊長大小如何，其相異兩邊長的「**比值**」皆不會改變。

**4.** 對直角$\triangle ABC$而言，相異兩邊長的比值，只有「六種」狀況：

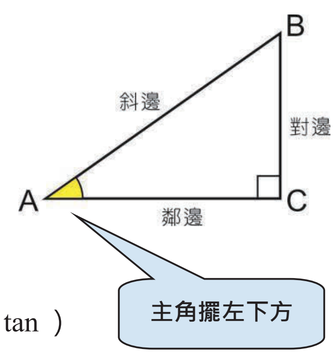
$\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$、$\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$、$\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$，以及三者的倒數$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$、$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$、$\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$（皆為「**沒有單位**」的**正數**）。

**5.** 直角$\triangle ABC$中，若$\angle C=90°$，則$\angle A$的三個**三角函數定義**如下：

(1) $\sin A=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\dfrac{對邊}{斜邊}$（sin：**正弦**，唸作 sine）

(2) $\cos A=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\dfrac{鄰邊}{斜邊}$（cos：**餘弦**，唸作 cosine）

(3) $\tan A=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\dfrac{對邊}{鄰邊}$（tan：**正切**，唸作 tangent）




※ 解題技巧：畫直角△→找主角→定邊長→找三巨頭（sin、cos、tan）

※ 因為【斜邊長 ＞ 兩股長】，故$\boxed{0<\sin A<1}$，$\boxed{0<\cos A<1}$。

※ 因為$0°<\angle A<90°$（銳角），故可得知在【第一象限角】內的三角函數值「皆為**正數**」。

**6.** **平方關係**：$\boxed{\sin^2\theta+\cos^2\theta=1}$

※ $(\sin\theta)^2=\sin^2\theta$、$(\sin\theta)^2\neq\sin\theta^2$

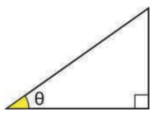
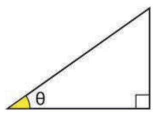
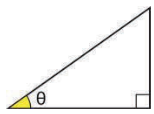
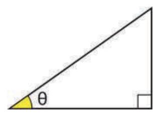
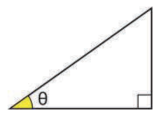
**7.** **餘角關係**：$\boxed{\sin\theta=\cos(90°-\theta)}$ 或 $\boxed{\cos\theta=\sin(90°-\theta)}$

※ 若$\angle A+\angle B=90°$，則$\angle A$和$\angle B$互為餘角

**8.** **商數關係**：$\boxed{\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

## 精選試題

**1.** 請寫出下列表格所對應的三角函數值

| | $\theta=30°$ | $\theta=45°$ | $\theta=60°$ | $\theta=15°$ | $\theta=75°$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\theta=$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ | $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ |
| $\cos\theta=$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ | $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ |
| $\tan\theta=$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | $2-\sqrt{3}$ | $2+\sqrt{3}$ |
| |  |  |  |  |  |

小口訣：15 和 75 邊角關係特殊記法：①15 和 75 是 2-4-6 三角形，②4 在中間，擺斜邊，

③2 和 6 抓出來 PK，④PK 前先穿盔甲，⑤大角對大邊，小角對小邊。

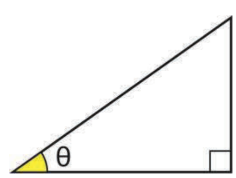
**2.** $\sqrt{3}(\cos 30°+\sin 60°+\tan 60°)=$ ___6___ 。

**3.** $\sqrt{3}\tan 30°+\sqrt{2}\sin 45°+\cos 60°=$ ___$\frac{5}{2}$___ 。

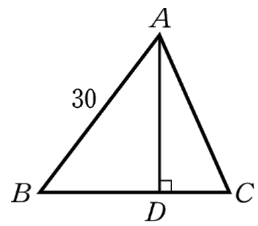
**4.** $\sin^2 30^\circ+\cos^2 60^\circ+\tan 60^\circ\cos 30^\circ=$ ___$\frac{5}{2}$___ 。

**5.** $\triangle ABC$ 中，若 $\angle C=90°$，$\sin B=\frac{7}{25}$，且 $\overline{AB}=50$，則 $\overline{AC}=$ ___14___，$\overline{BC}=$ ___48___ 。

小技巧：已知斜邊，要求對邊用 sin，即【邊長 x sin】，要求鄰邊用 cos，即【邊長 x cos】



**6.** 如右圖，$\overline{AD} \perp \overline{BC}$，且 $\overline{AB}=30$，$\sin B=\frac{4}{5}$，$\tan C=\frac{12}{5}$，則 $\overline{BC}=$ $\underline{\quad 28 \quad}$。




**7.** 設 $\theta$ 是銳角，且 $\tan\theta=2$，則 $\frac{2\sin\theta-3\cos\theta}{2\sin\theta+3\cos\theta}=$ $\underline{\quad \frac{1}{7} \quad}$。

小技巧：方法①先用 tan，畫三角形，求得 sin 和 cos，或方法②上下同除 cos，利用商數關係，簡化算式

**8.** 已知 $\theta$ 為銳角，且 $\tan\theta=\frac{3}{4}$，則 $\frac{2\sin\theta-1}{3+4\cos\theta}=$ $\underline{\quad \frac{1}{31} \quad}$。

**9.** 已知 $\theta$ 為銳角，若 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{17}}{3}$，且 $\sin\theta>\cos\theta$，試求：

(1) $\sin\theta\cos\theta=$ $\underline{\quad \frac{4}{9} \quad}$。

小口訣：sin 和 cos 只有在平方才會發生關係【平方關係】

(2) $\sin\theta-\cos\theta=$ $\underline{\quad \frac{1}{3} \quad}$。

小口訣：sin 和 cos 只有在平方才會發生關係【平方關係】

(3) $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=$ $\underline{\quad \frac{9}{4} \quad}$。

小提示：商數關係上場

(4) $\sin^3\theta+\cos^3\theta=$ $\underline{\quad \frac{5\sqrt{17}}{27} \quad}$。

小提示：立方和公式上場

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)^3-3ab(a+b)$$

**10.** $\left(\sin 47°+\sin 43°\right)^2+\left(\sin 47°-\sin 43°\right)^2=$ ___2___ 。

小口訣：sin 和 cos 只有在平方才會發生關係【平方關係】

**11.** $\cos^2 10°+\cos^2 20°+\cos^2 30°+\cos^2 40°+\cos^2 50°+\cos^2 60°+\cos^2 70°+\cos^2 80°=$ ___4___ 。

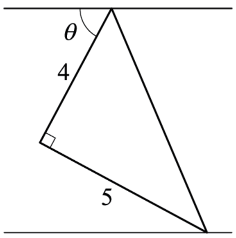
小口訣：sin 和 cos 只有在平方才會發生關係【平方關係】

**12.** $\sin^2 1°+\sin^2 2°+\sin^2 3°+...+\sin^2 45°+...+\sin^2 87°+\sin^2 88°+\sin^2 89°+\sin^2 90°=$ ___$\frac{91}{2}$___ 。

小口訣：sin 和 cos 只有在平方才會發生關係【平方關係】

**13.** 【進階題】如圖，設直角三角形放入兩條平行線間，若直角三角形的兩股長為 4 與 5 ，則兩平行線間的距離為下列哪一個選項？___$(C)$___ 。

小技巧：已知斜邊，要求對邊用 sin，即【邊長 x sin】，要求鄰邊用 cos，即【邊長 x cos】




(A) $4\cos\theta+5\cos\theta$ (B) $4\cos\theta+5\sin\theta$

(C) $4\sin\theta+5\cos\theta$ (D) $4\sin\theta+5\sin\theta$

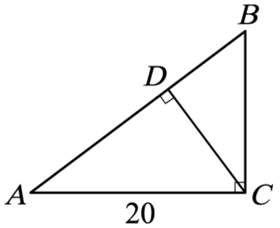
**14.** 【進階題】如圖，$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$ ，$D$ 在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{CD}\perp\overline{AB}$ ，若 $\overline{AC}=20$ ，$\sin A=\frac{3}{5}$ ，則：

(1) $\overline{CD}=$ ___12___ 。

(2) $\overline{AD}=$ ___16___ 。

(3) $\overline{AB}=$ ___25___ 。

(4) $\cos\angle BCD=$ ___$\frac{4}{5}$___ 。



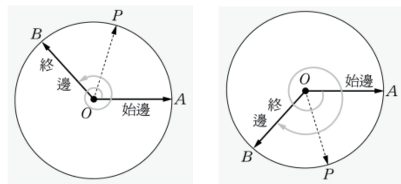
# 焦點 2

範圍 第二冊／三角比
內容 廣義角和極坐標

## 重點整理

**1.** 有向角

(1) 平面上一射線 $\overrightarrow{OP}$，繞著端點 $O$【頂點】，從 $\overrightarrow{OA}$【始邊】開始以**逆時針**或**順時針**方向，旋轉至 $\overrightarrow{OB}$【終邊】，形成 $\angle AOB$，像這樣**具有旋轉方向**的角，稱為【**有向角**】。




(2) 依**逆時針**方向旋轉的角為【**正向角**】。例：$\sin 30°$

以**順時針**方向旋轉的角為【**負向角**】。例：$\sin(-330°)$

**2.** 廣義角：有向角之角度不再限制於 $0°$ 到 $180°$ 之間，其角度可以為任意實數，稱為【**廣義角**】。

**3.** 同界角

(1) 若兩個角的**始邊、終邊均相同**（亦即可旋轉超過一圈），稱為【**同界角**】。

(2) 任意兩個同界角的**「所有」三角函數值均相等**。

(3) 任意兩個同界角的**角度差**應該為 $360°$ 的整數倍。

亦即，若 $\theta_1$ 與 $\theta_2$ 為同界角 $\Leftrightarrow$ $\boxed{\theta_1-\theta_2=n\times 360°}$，$n\in Z$。

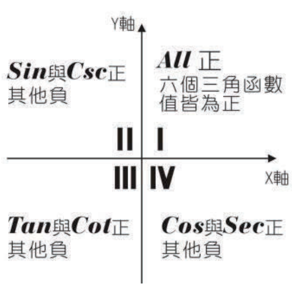
**4.** 標準位置角

(1) 坐標平面上，若廣義角 $\theta$ 的**頂點在原點上**，且**始邊在 $x$ 軸的正向上**，稱 $\theta$ 為【**標準位置角**】。

例：若 $\theta$ 的終邊落在第二象限內，稱為【**第二象限角**】（其他類推）

(2) 如果 $\theta$ 的終邊落在坐標軸上（$x$ 軸或 $y$ 軸），稱為【**象限角**】。

**5.** 四大象限角的正負關係




**小口訣【可以舉個同學當主角，會比較有趣】：**

**投進 I 球(第一象限角)。所有的人都做得到！**

**投進 II 球(第二象限角)。「塞」$\sin\theta$「進」的吧！**

**投進 III 球(第三象限角)。「天」呀 $\tan\theta$！太神了！**

**投進 IV 球(第四象限角)。「酷」呀 $\cos\theta$！有吃藥！**

**6.** 象限角的三角函數值　　小口訣：記不起來，可以畫個誇張三角形來輔助引導喔~

| $\theta=$ | $0°$ | $90°$ | $180°$ | $270°$ |
|---|---|---|---|---|
| $\sin\theta$ | 0 | 1 | 0 | $-1$ |
| $\cos\theta$ | 1 | 0 | $-1$ | 0 |
| $\tan\theta$ | 0 | 不存在 | 0 | 不存在 |

**7.** 角度轉換：小口訣：若 $\theta$ 沒說明，就當成銳角（小角）看待

(1) **STEP1** 處理**負角**。→小口訣：只有【$\cos\theta$】可以把負號吃掉，吃不掉把負號吐出來。

(2) **STEP2** 把角度縮到【$360°$】內。→【求出 $\boxed{\text{最小正同界角}}$】

(3) **STEP3** **畫圖**，**決定**方向角所在**象限**。

(4) **STEP4** 象限**決定**此三角函數值之**正負**（參見重點 **5**），【**原三角函數照抄**】。

(5) **STEP5** 往【$x$ **軸**】**貼近**（畫垂直線），畫**直角三角形**，計算該「**銳角**」的三角函數值。

**8.** 三角函數比大小（這裡只比較 $0°<\theta<90°$ 的三角函數值）

(1) 當 $0°<\theta<45°$，（正）<（餘）　例：$\sin10°<\cos10°$

(2) 當 $45°<\theta<90°$，（正）>（餘）　例：$\sin80°>\cos80°$

(3) 正函數 $\sin\theta$，角度越大，其值越大（遞增↗）。　例：$\sin10°<\sin40°<\sin70°$

餘函數 $\cos\theta$，角度越大，其值越小（遞減↘）。

## 精選試題

**1.** 請寫出下列表格所對應的三角函數值

| $\theta=$ | $120°$ | $135°$ | $150°$ | $210°$ | $225°$ | $240°$ | $300°$ | $315°$ | $330°$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\theta$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ |
| $\cos\theta$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\tan\theta$ | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ |

**2.** 在坐標平面上，點 $P(\cos 470°, \sin 280°)$ 在第__三__象限。

**3.** 若已知一點 $P(\sin\theta, \cos\theta)$ 在第四象限，則 $Q(\cos\theta, \tan\theta)$ 在第__三__象限。

**4.** 若 $\tan\theta > 0$， $\cos\theta < 0$，則點 $Q(\sin\theta, \sin\theta + \cos\theta)$ 在第__三__象限。

**5.** 設 $\theta$ 為一標準位置角， $P(-12, 5)$ 為 $\theta$ 終邊上的一點，則 $\sin\theta =$ __$\frac{5}{13}$__。

**6.** 坐標平面上 $A$ 點的直角坐標為 $(4, -4\sqrt{3})$，極坐標為 $[r, \theta]$，其中 $r > 0$，且 $0° < \theta < 360°$，則數對 $(r, \theta) =$ __$\left(8, \frac{5\pi}{3}\right)$__。

**7.** 已知 $\cos\theta = \frac{3}{5}$，且 $270° < \theta < 360°$，則 $\sin\theta =$ __$-\frac{4}{5}$__， $\tan\theta =$ __$-\frac{4}{3}$__。

**8.** 設 $\tan\theta = -\frac{3}{4}$，且 $\cos\theta < 0$，則 $\frac{\cos\theta}{1 - \sin\theta} + \frac{\sin\theta}{2 + \cos\theta} =$ __$-\frac{3}{2}$__。

$$-\frac{3}{2} = \frac{-\frac{4}{5}}{1 - \frac{3}{5}} + \frac{\frac{3}{5}}{2 + \left(-\frac{4}{5}\right)}$$

**9.** $\sin(-150°)\times\tan 225°\times\cos(-300°)-\sin 315°\times\cos 315°=$ $\underline{\dfrac{1}{4}}$ 。

$\dfrac{1}{4}=\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times 1\times\left(\dfrac{1}{2}\right)-\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

**10.** 已知 $\tan 22°=k$ ，則 $\sin 2002°=$ $\underline{-\dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}}}$ 。

**11.** 已知 $\cos(-110°)=k$ ，則 $\tan 250°=$ $\underline{\dfrac{\sqrt{1-k^2}}{-k}}$ 。

**12.** 已知兩直線 $L_1:\sqrt{3}x-y+2=0$ ， $L_2:x+y-2=0$ ，試求：

(1) 直線 $L_1$ 的斜率為 $\underline{\sqrt{3}}$ ，斜角為 $\theta_1=$ $\underline{60°}$ 。

(2) 直線 $L_2$ 的斜率為 $\underline{-1}$ ，斜角為 $\theta_2=$ $\underline{135°}$ 。

(3) 直線 $L_1$ 與 $L_2$ 的銳夾角為 $\underline{75°或105°}$ 。

**小口訣：(1)直線斜率** $m=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

**(2)若直線斜角為** $\theta$ ，則 $m=\tan\theta$

**(3)若** $L:ax+by+c=0$ ，則 $m=-\dfrac{a}{b}$

(法一)用斜角直接畫出兩條直線，判斷角度

(法二) $\tan\theta=\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\dfrac{\sqrt{3}-(-1)}{1+(\sqrt{3})(-1)}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$ ， $\theta=105°$ ，另一角為 $75°$

(法三) 因 $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|\cos\theta$

故 $(\sqrt{3},-1)\cdot(1,1)=\sqrt{3}-1=2\sqrt{2}\cos\theta$

所以 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ，故 $\theta=75°$，另一角為 $105°$

**13.** 設 $90^\circ < \theta < 180^\circ$，若 $\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{5}$，試求：

(1) $\sin^2\theta + \cos^2\theta =$ $\underline{\quad 1 \quad}$。

小口訣：sin 和 cos 只有在平方才會發生關係【平方關係】

(2) $\sin\theta\cos\theta =$ $\underline{\quad -\frac{12}{25} \quad}$。

小口訣：sin 和 cos 只有在平方才會發生關係【平方關係】

(3) $\sin\theta - \cos\theta =$ $\underline{\quad \frac{7}{5} \quad}$。

小口訣：sin 和 cos 只有在平方才會發生關係【平方關係】

(4) $\sin\theta =$ $\underline{\quad \frac{4}{5} \quad}$。

小口訣：求交點，解聯立

(5) $\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} =$ $\underline{\quad -\frac{25}{12} \quad}$。

小提示：商數關係上場

(6) $\sin^3\theta + \cos^3\theta =$ $\underline{\quad \frac{37}{125} \quad}$。

小提示：立方和公式

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

(7) $\sin 2\theta =$ $\underline{\quad -\frac{24}{25} \quad}$。

小提示：兩倍角公式 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

【對應到第(2)題】

(8) $\cos 2\theta =$ $\underline{\quad -\frac{7}{25} \quad}$。

小提示：兩倍角公式 $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

【對應到第(1)題】

**14.** 設 $270°<\theta<360°$，若 $4\sin\theta+3\cos\theta=0$，則 $\sin\theta-\cos\theta=$ $\underline{\ -\frac{7}{5}\ }$。

**15.** 設 $0°\le x<360°$，則函數 $f(x)=\sin^2 x-2\cos x+2$ 之最大值為 $\underline{\ 4\ }$。

小提示：當 $0°\le x<360°$，$-1\le\sin x\le1$，$-1\le\cos x\le1$

**16.** 設 $0°<\theta<45°$，則 $\dfrac{\sin(-\theta)}{\sin(180°+\theta)}-\dfrac{\cos(180°-\theta)}{\sin(270°+\theta)}+\dfrac{\cos(90°-\theta)}{\sin(90°+\theta)}-\dfrac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)}=$ $\underline{\ 2\tan\theta\ }$。

小提示：答案可能是整數，可能是分數，也可能因為條件不足無法解出來，只能用代號表示！

**17.** 化簡 $\dfrac{\tan(-\theta)}{\tan(180°+\theta)}-\dfrac{\sin(270°+\theta)}{\sin(90°-\theta)}-\dfrac{\cos(-\theta)}{\sin(90°+\theta)}=$ $\underline{\ -1\ }$。

**18.** 【變化題】$\sin1°+\sin2°+\sin3°+...+\sin180°+...+\sin358°+\sin359°+\sin360°=$ $\underline{\ 0\ }$。

**19.** 【變化題】$\cos1°+\cos2°+\cos3°+...+\cos178°+\cos179°+\cos180°=$ $\underline{\ -1\ }$。

# 焦點 3

範圍 第二冊／三角比

內容 極坐標、弧度量、正/餘弦定理

## 重點整理

**1.** 直角坐標與極坐標 ※像新聞主播在播報颱風的位置：先說方位，再說距離

(1) 坐標平面上，若 $A$ 點到原點(極點)的距離為 $r$ $(r>0)$，且標準位置角為 $\theta$，

則 $A$ 點的【**極坐標**】可表示為 $[r,\theta]$。 ※小口訣：阿，系阿。(因為不常用，常常會忘記)

(2) 若 $A$ 點【直角坐標】為 $(x,y)$，$A$ 點【極坐標】為 $[r,\theta]$，則 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$，$r=\sqrt{x^2+y^2}$。

**2.** 角度與**弧度**

(1) 定義：當圓弧 $PQ$ 的**弧長等於此圓的半徑**時，稱 $PQ$ 所對應到的圓心角為 **1 弧度**（ 弳 ）。

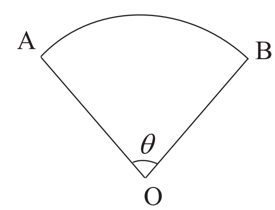
(2) 弧度：弳度量 $=\dfrac{\text{弧長}}{\text{半徑}}$，即 $\theta=\dfrac{S}{r}$ $\Rightarrow$ $S=r\theta$，稱此旋轉量為 $\theta$ 弧度。※【弧度】兩字省略不寫。

(3) $2\pi=360°$ $\Rightarrow$ $\pi=180°$ ※小口訣：看到 $\pi$ 要立刻想到 $180$。(拍郎很高，都長到 180)

(4) 因為 $\pi\times1$ 徑度 $=180\times1°$，故【弳】轉【度】: $1$(弧度) $=\dfrac{180°}{\pi}=\dfrac{180°}{3.14}\approx57°$

【度】轉【弳】: $1°=\dfrac{\pi}{180}$

**3.** 如圖扇形 $AOB$ 中，半徑 $\overline{OA}=\overline{OB}=r$，中心角 $\theta$，弧長 $AB=s$。




(1) **弧長** $s=r\theta$ ※小口訣：阿，系阿。(因為不常用，常常會忘記)

(2) **扇形面積** $A=\dfrac{1}{2}rs=\dfrac{1}{2}r^2\theta$。($\theta$ 以弧度表示) ※有沒有覺得很像 1/2 底 X 高

**4.** **正弦定理** ※還記得，正弦就是 sin 吧~

$$\boxed{\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R}$$

※小口訣：有邊有角用正弦，反之，用餘弦

變化形式：$\boxed{a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C}$

**5.** **餘弦定理** ※還記得，餘弦就是 cos 吧~

$$\boxed{\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$$

※小口訣：有關係的兩邊平方和，減掉不相關的第三邊，除以 2bc

變化形式：$\boxed{a^2=b^2+c^2-2bc\cos A}$

※小口訣：求角度最常見的兩個方法：(1)看到三角形，可用【餘弦定理】，(2)看到坐標或向量，可用【向量內積】

## 精選試題

**1.** 已知 $A[4,60°]$、$B[4,k°]$為平面上的兩點，其中 $0<k<180$，$O$ 為極點(原點)，試求：

(1) $\triangle AOB$ 為正三角形，則 $k=$__120__。

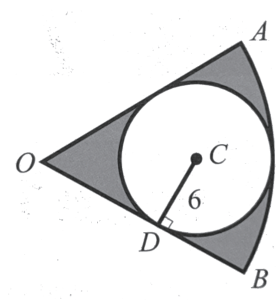
(2) 呈上題，$\triangle AOB$ 面積為__$4\sqrt{3}$__。

**2.** 已知平面上三點 $A[4,30°]$、$B[8,90°]$、$C[2,150°]$，，試求：

(1) $\overline{AB}=$__$4\sqrt{3}$__。

(2) $\triangle ABC$ 面積為__$10\sqrt{3}$__。

**3.** 如右圖，扇形 $OAB$ 的圓心角為 $\frac{\pi}{3}$，扇形的內切圓半徑為 6，試求：




(1) $\overset{\frown}{AB}$ 的弧長為__$6\pi$__。

(2) 扇形 $OAB$ 的面積為__$54\pi$__。

(3) 深色部分的面積為__$18\pi$__。

**4.** $\triangle ABC$ 中，若 $\angle A=45°$，$\angle C=75°$，$\overline{BC}=12$，試求：

(1) $\overline{AC}=$__$6\sqrt{6}$__。

(2) $\triangle ABC$ 的外接圓半徑為__$3\sqrt{2}$__。

**5.** $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A:\angle B:\angle C=1:3:8$，試求：

(1) $\sin A:\sin B:\sin C=$ $\underline{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right):2\sqrt{2}:2\sqrt{3}}$。

(2) $\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}=$ $\underline{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right):2\sqrt{2}:2\sqrt{3}}$。

**6.** $\triangle ABC$ 中，設 $\angle A,\angle B,\angle C$ 對邊長分別為 $a,b,c$，若 $(b+c):(c+a):(a+b)=4:5:6$，則：

(1) $a:b:c=$ $\underline{7:5:3}$。

(2) $\sin A:\sin B:\sin C=$ $\underline{7:5:3}$。

**7.** $\triangle ABC$ 中，設 $\overline{BC}=a,\overline{AC}=b,\overline{AB}=c$，若 $5a+2b-5c=0$，$3a-12b+8c=0$，試求：

(1) $a:b:c=$ $\underline{4:5:6}$。

(2) $\sin A:\sin B:\sin C=$ $\underline{4:5:6}$。

**8.** $\triangle ABC$ 中，已知 $\sin A:\sin B:\sin C=5:6:7$，試求：

(1) $\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}=$ $\underline{5:6:7}$。

(2) $\cos B=$ $\underline{\dfrac{19}{35}}$。

**9.** $\triangle ABC$ 中，若 $\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=4$，$\angle A=60^\circ$，試求：

(1) $\overline{BC}=$ $\underline{\sqrt{21}}$。

(2) $\triangle ABC$ 面積為 $\underline{5\sqrt{3}}$。

**10.** $\triangle ABC$ 中，若 $\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=8$，$\overline{BC}=7$，試求：

(1) $\triangle ABC$ 面積為 $\underline{10\sqrt{3}}$。

(2) $\angle A=$ $\underline{60^\circ}$。

**11.** 在 $\triangle ABC$ 中，若 $D$ 點在 $\overline{BC}$ 邊上，且 $\overline{AB}=7$，$\overline{AC}=13$，$\overline{BD}=7$，$\overline{CD}=8$，則 $\overline{AD}=$ $\underline{7}$。

**12.** $\triangle ABC$，已知 $\overline{AB}=7$，$\overline{BC}=7$，$D$ 為 $\overline{BC}$ 上的一點，且 $\overline{BD}:\overline{DC}=5:2$，$\overline{AD}=3$，則 $\overline{AC}=$ $\underline{\sqrt{7}}$。

**13.** 若 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB}=8$，$\overline{AC}=6$，$\angle A=120^\circ$，若 $\angle A$ 的角平分線交 $\overline{BC}$ 於 $D$，則：

(1) $\triangle ABD$ 面積：$\triangle ACD$ 面積 $=$ $\underline{4:3}$。

(2) 【題型一】: 角平分線 $\overline{AD}=$ $\underline{\dfrac{24}{7}}$。

**14.** $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=6$，$\overline{AC}=7$，若 $M$ 為 $\overline{BC}$ 上的中點，$G$ 為重心，則：

(1) $\triangle ABC$ 面積為 $\underline{\quad 6\sqrt{6} \quad}$。

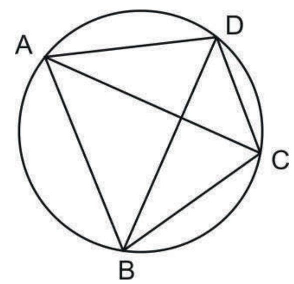
(2) 【題型二】：中線 $\overline{AM}=\underline{\quad 2\sqrt{7} \quad}$；$\overline{AG}=\underline{\quad \frac{4\sqrt{7}}{3} \quad}$。

(3) 【題型三】：若 $E$ 為 $\overline{BC}$ 上的一點，且 $\overline{BE}=2$，則 $\overline{AE}=\underline{\quad 5 \quad}$。

**15.** 設 $ABCD$ 為圓內接四邊形，已知 $\angle DBC=30°$，$\angle ABD=45°$，$\overline{CD}=6$，試求：

(1) $\overline{AD}=\underline{\quad 6\sqrt{2} \quad}$。

(2) 四邊形 $ABCD$ 的「外接圓」面積為 $\underline{\quad 36\pi \quad}$。




**16.** 設 $ABCD$ 為圓內接四邊形，已知 $\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=3$，$\overline{CD}=5$，$\overline{DA}=8$，試求：

(1) 對角線 $\overline{BD}=\underline{\quad 7 \quad}$。

(2) $\angle A=\underline{\quad 60° \quad}$。

(3) 四邊形 $ABCD$ 的「外接圓」面積為 $\underline{\quad \frac{49\pi}{3} \quad}$。

# 焦點 4

**範圍** 第三冊／三角函數
**內容** 面積公式、和差角公式

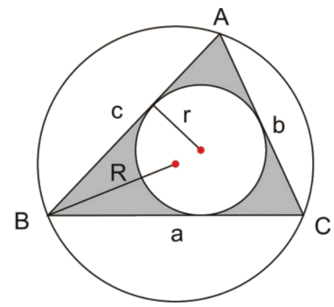
## 重點整理

**1.** 先備小常識【名稱定義】：$\triangle ABC$ 中，$a$、$b$、$c$ 分別為 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 之對邊長

(1) 【$R$】：$\triangle ABC$ 外接圓半徑

(2) 【$r$】：$\triangle ABC$ 內接圓半徑

(3) 【$s$】：$\triangle ABC$ 周長的一半，即 $s=\dfrac{a+b+c}{2}$




**2.** 三角形面積公式

(1) $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times$底$\times$高

(2) $\boxed{\triangle ABC=\dfrac{1}{2}bc\sin A}$

(3) $\triangle ABC=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$【海龍公式】 ※小口訣：海龍王維持正義(略)

(4) $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}|$點排站$|$ ※小口訣：頂點排排站，交叉相減 A→B→C→A

(5) $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}|$向量橫著擺，交叉相減$|$ ※小口訣：向量橫著擺，交叉相減

(6) 【補充】$\triangle ABC=\dfrac{abc}{4R}$ 【$R$：$\triangle ABC$ 外接圓半徑】

(7) 【補充】$\triangle ABC=rs$ 【$r$：$\triangle ABC$ 內接圓半徑，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$】

**3.** 和差角公式

(1) $\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$ ※小口訣：賽摳，摳賽。善良的人，愛合作，你一個，我一個

$\boxed{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}$

(2) $\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$ ※小口訣：摳摳，賽賽。摳的人，賺時先拿，一腳踹開別人

$\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$

(3) $\boxed{\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}}$ ※小口訣：1 減天天，分之，天加天；1 加天天，分之，天減天

$\boxed{\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}}$

### 4. 兩倍角公式

(1) 利用和差角公式：$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$

$\Rightarrow \sin(\theta+\theta)=\sin\theta\cos\theta+\cos\theta\sin\theta=2\sin\theta\cos\theta$

$\Rightarrow \boxed{\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta}$

(2) 利用和差角公式：$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$

$\Rightarrow \cos(\theta+\theta)=\cos\theta\cos\theta-\sin\theta\sin\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

$\Rightarrow \boxed{\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta}$

$\Rightarrow$又 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$　可得 1：$\boxed{\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1}$ $\Rightarrow \cos\theta=1-2\sin^2\dfrac{\theta}{2}$　**(可用在半角公式)**

可得 2：$\boxed{\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta}$ $\Rightarrow \cos\theta=2\cos^2\dfrac{\theta}{2}-1$　**(可用在半角公式)**

(3) 利用和差角公式：$\boxed{\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}}$

$\Rightarrow \tan(\theta+\theta)=\dfrac{\tan\theta+\tan\theta}{1-\tan\theta\tan\theta}=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$\Rightarrow \boxed{\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}}$

《應用題型》求兩條直線的夾角：$\boxed{\tan\theta=\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}}$　※ $m_1$ 為直線 $L_1$ 的斜率，$m_2$ 為直線 $L_2$ 的斜率。

## 精選試題

**1.** $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=6$，$\overline{AC}=8$，$\angle A=120°$，若 $\overline{AD}$ 為 $\angle BAC$ 的角平分線，且交 $\overline{BC}$ 於點 $D$，試求：

(1) $\triangle ABC$ 的面積為 $\underline{12\sqrt{3}}$。

(2) $\overline{BC}=\underline{2\sqrt{37}}$。

(3) 角平分線 $\overline{AD}=\underline{\dfrac{24}{7}}$。

(4) 「$\overline{AC}$」邊上的高為 $\underline{3\sqrt{3}}$。

**2.** $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=7$，$\overline{BC}=6$，$\overline{CA}=5$，試求：

(1) $\triangle ABC$ 的面積為 $\underline{\;6\sqrt{6}\;}$。

(2) $\triangle ABC$ 的外接圓「半徑」為 $\underline{\;\dfrac{35\sqrt{6}}{24}\;}$。

(3) $\sin A:\sin B:\sin C=\underline{\;6:5:7\;}$。

(4) $\cos B=\underline{\;\dfrac{5}{7}\;}$。

(5) $\sin B=\underline{\;\dfrac{2\sqrt{6}}{7}\;}$。

(6) 若 $M$ 為 $\overline{BC}$ 的中點，則中線長 $\overline{AM}=\underline{\;2\sqrt{7}\;}$。

**3.** $\cos 65^\circ\cos 20^\circ+\sin 65^\circ\sin 20^\circ=\underline{\;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\;}$。

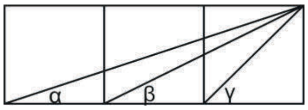
**4.** $\sin 23^\circ\cos 112^\circ-\sin 292^\circ\sin 67^\circ=\underline{\;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\;}$。

**5.** $\dfrac{\tan 58^\circ-\tan 28^\circ}{1+\tan 58^\circ\tan 28^\circ}=\underline{\;\dfrac{\sqrt{3}}{3}\;}$。

**6.** $\sqrt{3}\tan 74^\circ-\sqrt{3}\tan 44^\circ-\tan 74^\circ\tan 44^\circ=\underline{\;1\;}$。

**7.** 設 $\alpha+\beta=45^\circ$，則 $(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)=\underline{\;2\;}$。

**8.** 將三個大小相同的$\boxed{\text{正方形}}$排成一列，如圖所示，則 $\tan(\alpha+\beta)=$ ___1___ 。




**9.** 設$\boxed{90°\le\alpha\le180°}$，$\boxed{-90°\le\beta\le0°}$，且 $\sin\alpha=\frac{1}{7}$ ， $\cos\beta=\frac{5\sqrt{3}}{14}$ ，則 $\alpha+\beta=$ ___120°___ 。

**10.** 設 $\alpha$ 為$\boxed{\text{銳角}}$， $\beta$ 為$\boxed{\text{鈍角}}$，且 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ ， $\sin\beta=\frac{12}{13}$ ，試求：

(1) $\sin(\alpha-\beta)=$ ___$-\frac{63}{65}$___ 。

(2) $\cos(\alpha-\beta)=$ ___$\frac{16}{65}$___ 。

**11.** 設$\boxed{270°<\theta<360°}$，若 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$ ，試求：

(1) $\sin2\theta=$ ___$-\frac{24}{25}$___ 。

(2) 數對 $(\sin\theta,\cos\theta)=$ ___$\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$___ 。

**12.** 設$\boxed{180°<\theta<270°}$，且 $\cos\theta=-\frac{4}{5}$ ，則下列選項何者正確？ ___(A)(C)(D)___ 。

(A) $\sin\theta=-\frac{3}{5}$　(B) $\tan\theta=\frac{4}{3}$　(C) $\sin2\theta=\frac{24}{25}$　(D) $\cos2\theta=\frac{7}{25}$　(E) $\tan2\theta=-\frac{24}{7}$

# 焦點 5

範圍　第一冊／指、對數

內容　指數律、科學記號與有效數字

## 重點整理

**1.** 牛刀小試【一】　※小口訣：當你練到能想都不用想，就練成最強武功了~

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (1) $2^0=1$ | (2) $2^1=2$ | (3) $2^2=4$ | (4) $2^3=8$ | (5) $2^4=16$ |
| (6) $2^5=32$ | (7) $2^6=64$ | (8) $2^7=128$ | (9) $2^8=256$ | (10) $2^9=512$ |
| (11) $2^{10}=1024$ | (12) $2^{11}=2048$ | (13) $3^0=1$ | (14) $3^2=9$ | (15) $3^3=27$ |
| (16) $3^4=81$ | (17) $3^5=243$ | (18) $3^6=729$ | (19) $4^2=16$ | (20) $4^3=64$ |
| (21) $4^5=1024$ | (22) $5^0=1$ | (23) $5^2=25$ | (24) $5^3=125$ | (25) $5^4=625$ |
| (26) $6^2=36$ | (27) $6^3=216$ | (28) $7^2=49$ | (29) $7^3=343$ | (30) $9^2=81$ |

**2.** **指數定義**

(1) 定義：$a^n=a\times a\times a\times\ldots$，稱 $a$ 為底數，$n$ 為指數。

(2) 零指數：$a\neq0$，$\boxed{a^0=1}$　【$0^0$：無意義】

(3) 負指數：$a\neq0$，$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$　※小口訣：負指數就是倒數。悟空金箍棒，能變長，卻被壓在五指山下

(4) 有理指數：$a>0$，$a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}$　※小口訣：次方有分數，就是開根號

**3.** **指數律**

(1) $a^m\times a^n=a^{m+n}$　※小口訣：底數相同，相乘→次方，相加

(2) $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$（$a\neq0$）　※小口訣：底數相同，相除→次方，相減

(3) $(a^m)^n=a^{m\times n}$　※小口訣：次方，再次方→次方，相乘

(4) $(a\times b)^n=a^n\times b^n$，$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$（$b\neq0$）

(5) 若 $a\times b\neq0$，則 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1}=\dfrac{b}{a}$

## 精選試題

**1.** 牛刀小試【二】 ※小口訣：暖身好好做，讓數感成為你解題的直覺【用 81 個基本題向 KOBE 致敬】

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (31) $2^{-1}=\frac{1}{2}$ | (32) $2^{-2}=\frac{1}{4}$ | (33) $2^{-3}=\frac{1}{8}$ | (34) $2^{-4}=\frac{1}{16}$ | (35) $2^{-5}=\frac{1}{32}$ |
| (36) $\frac{1}{2}=2^{-1}$ | (37) $\frac{1}{4}=2^{-2}$ | (38) $\frac{1}{8}=2^{-3}$ | (39) $\frac{1}{16}=2^{-4}$ | (40) $\frac{1}{32}=2^{-5}$ |
| | (41) $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ | (42) $\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$ | (43) $\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$ | (44) $\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$ |
| (45) $3^{-1}=\frac{1}{3}$ | (46) $3^{-2}=\frac{1}{9}$ | (47) $3^{-3}=\frac{1}{27}$ | (48) $3^{-4}=\frac{1}{81}$ | (49) $3^{-5}=\frac{1}{243}$ |
| (50) $\frac{1}{3}=3^{-1}$ | (51) $\frac{1}{9}=3^{-2}$ | (52) $\frac{1}{27}=3^{-3}$ | (53) $\frac{1}{81}=3^{-4}$ | (54) $\frac{1}{243}=3^{-5}$ |
| (55) $\frac{1}{5}=5^{-1}$ | (56) $\frac{1}{25}=5^{-2}$ | (57) $\frac{1}{125}=5^{-3}$ | (58) $\frac{1}{625}=5^{-4}$ | |
| (59) $5^{-1}=\frac{1}{5}$ | (60) $5^{-2}=\frac{1}{25}$ | (61) $5^{-3}=\frac{1}{125}$ | (62) $5^{-4}=\frac{1}{625}$ | |
| (63) $2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$ | (64) $2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}$ | (65) $2^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{2}$ | (66) $2^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{4}$ | (67) $2^{\frac{3}{2}}=\sqrt{8}$ |
| (68) $3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$ | (69) $5^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{5}$ | (70) $3^{\frac{5}{3}}=\sqrt[3]{243}$ | (71) $3^{\frac{5}{4}}=\sqrt[4]{243}$ | (72) $3^{\frac{5}{2}}=\sqrt{243}$ |
| (73) $\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{3}}$ | (74) $\sqrt[3]{2^5}=2^{\frac{5}{3}}$ | (75) $\sqrt[4]{2^3}=2^{\frac{3}{4}}$ | (76) $\sqrt[3]{81}=3^{\frac{4}{3}}$ | (77) $\sqrt[4]{243}=3^{\frac{5}{4}}$ |
| (78) $0.5=2^{-1}$ | (79) $0.25=2^{-2}$ | (80) $0.125=2^{-3}$ | (81) $0.0625=2^{-4}$ | |

**2.** 設 $4^{x+2}=\left(\frac{1}{4}\right)^{3x-6}$，則 $x=$ 1 。

**3.** $(0.5)^2\times(0.25)^{-1}\times\left(\sqrt{0.125}\right)=2^m$，則 $m=$ $-\frac{3}{2}$ 。

**4.** 設 $f(x)=3^x$，若 $f(a)=1$ 且 $f(b)=2$，則 $f(a+b)=$ __2____。

**5.** 若 $\sqrt[5]{9\times\sqrt[4]{27\times\sqrt[3]{3}}}=3^n$，則 $n=$ __$\frac{17}{30}$____。

**6.** 對任意實數 $x$ 而言，$27^{\left(x^2+\frac{2}{3}\right)}$ 的最小值為__9____。【97 學測】

**7.** 設 $f(x)=x^2+6x+13$，則 $3^{f(x)}$ 最小值為__81____。【仿 97 學測】

**8.** 設 $2^x=3^y=6$，則 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=$ __1____。

**9.** 設 $67^x=27$，$603^y=81$，則 $\frac{3}{x}-\frac{4}{y}=$ __$-2$____。

**10.** 解 $2^{2x+1}+2^{3x}=5\cdot 2^{x+4}$。$x=$ __3____。

**11.** 已知 $a=2^{40}$ 、 $b=5^{30}$ 、 $c=3^{20}$ 、 $d=6^{10}$ ，則 $a,b,c,d$ 之大小關係為 $\underline{b>a>c>d}$。

**12.** 下列選項中的數，何者最大？$\underline{\text{(B)}\quad}$。【93 學測】( 其中 $n!=n\times(n-1)\times\ldots\times3\times2\times1$ )

(A) $100^{10}$  (B) $10^{100}$  (C) $50^{50}$  (D) $50!$  (E) $\dfrac{100!}{50!}$

(B)>(E)>(C)>(D)>(A)

**13.** 設 $a>0$ ，且 $a^{2x}=3-2\sqrt{2}$ ，試求：【因為 $a>0$ ，所以 $a^x$ 必 $\underline{\sqrt{2}-1}$ 】

(1) $a^x=\underline{\sqrt{2}-1}$ 。

(2) $a^{-x}=\underline{\sqrt{2}+1}$ ； $a^{-2x}=\underline{3+2\sqrt{2}}$ 。

(3) $\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}=\underline{5}$ 。

(4) $\dfrac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}=\underline{6}$ 。

**14.** 設 $a>0$ ，且 $a^{2x}=3$ ，試求：

(1) $\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}=\underline{\dfrac{14}{3}}$ 。

(2) $\dfrac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}=\underline{\dfrac{13}{6}}$ 。

(3) $\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^{3x}+a^{-5x}}=\underline{\dfrac{9}{41}}$ 。

# 焦點 6

範圍 第一冊／指、對數

內容 常用對數、對數律

## 重點整理

**1. 對數的定義**

(1) $\log_a b\begin{cases}\text{真數：}b>0\\ \text{底數：}a>0, a\neq 1\end{cases}$，稱以 $a$ 為底數 $b$ 的對數。 ※小口訣：看到 LOG 想到$\boxed{\text{範圍}}$

(2) $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$。 ※補充：$y=a^x$ 和 $y=\log_a x$ 互為【反函數】【圖形對稱 $x=y$】

**2.** 以10為底的【常用對數】:

任何正數 $a$ 都可以化成「10的次方」，而這個次方的值就用符號 $\log a$ 表示，即 $a=10^{\log a}$。

$\boxed{10^0=1}$，$10^a=2$，$10^b=3$，$10^c=5$，……，$10^d=9$，$\boxed{10^1=10}$，……，$10^2=100$

$\boxed{\text{例}}$：$2=10^{0.3010}$，按計算機十分逼近的結果，即 $2=10^{\log 2}$，故 $\log 2\approx 0.3010$

$3=10^{0.4771}$，按計算機十分逼近的結果，即 $3=10^{\log 3}$，故 $\log 3\approx 0.4771$

$4=2\times 2=10^{0.3010}\times 10^{0.3010}=10^{0.3010+0.3010}=10^{2\times 0.3010}=10^{2\times\log 2}=10^{\log 4}$，即故 $\log 4=2\log 2$

$5=\dfrac{10}{2}=\dfrac{10}{10^{0.3010}}=10^{1-0.3010}=10^{0.6990}$，又 $5=10^{\log 5}$，故 $\log 5\approx 0.6990$

$6=2\times 3=10^{0.3010}\times 10^{0.4771}=10^{\log 2}\times 10^{\log 3}=10^{\log 2+\log 3}=10^{0.7781}$，又 $6=10^{\log 6}$，故 $\log 6\approx 0.7781$

$8=2^3=\left(10^{0.3010}\right)^3=10^{3\times 0.3010}=10^{3\times\log 2}=10^{\log 8}$，即故 $\log 8=3\log 2$

$9=3\times 3=10^{0.4771}\times 10^{0.4771}=10^{0.4771+0.4771}=10^{2\times 0.4771}=10^{2\times\log 3}=10^{\log 9}$，即故 $\log 9=2\log 3$

**3.** 對數律【一】

(1) $\log_a 1=0$

(2) $\log_a a=1$ ※補充：看到$\boxed{\log_1 1}$不要被騙了

(3) $\log M=\log_{10} M$ （底數10可以省略），稱【常用對數】。

(4) $\boxed{\log_a a^M}=M\log_a a=M$，$\boxed{\log_{a^n} a}=\dfrac{1}{n}\log_a a=\dfrac{1}{n}$，

$\boxed{\log_{a^n} b^M}=\dfrac{M}{n}\log_a b$ ※小口訣：上者恆上，下者恆下

(5) $\log_a b=\log_{a^2} b^2=\log_{a^3} b^3=\log_{\frac{1}{a}}\dfrac{1}{b}=\log_{\sqrt{a}}\sqrt{b}=\ldots$ ※小口訣：底數和真數可以同時掛上對我們有利的次方

## 精選試題

**1.** 牛刀小試

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (1) $10^{\log 2}=2$ | (2) $10^{\log 3}=3$ | (3) $10^{\log 4}=4$ | (4) $10^{\log 5}=5$ | (5) $10^{\log 6}=6$ |
| (6) $10^{0.3010}\approx 2$ | (7) $10^{0.4771}\approx 3$ | (8) $10^{0.6020}\approx 4$ | (9) $10^{0.6990}\approx 5$ | (10) $10^{0.7781}\approx 6$ |
| (11) $\log_3 1=0$ | (12) $\log_5 1=0$ | (13) $\log_{10} 1=0$ | (14) $\log_{0.1} 1=0$ | (15) $\log_{\sqrt{3}} 1=0$ |
| (16) $\log_3 3=1$ | (17) $\log_5 5=1$ | (18) $\log_6 6=1$ | (19) $\log_{0.1} 0.1=1$ | (20) $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}=1$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| (21) $\log_2 2=1$ | (22) $\log_4 4=1$ | (23) $\log_8 8=1$ | (24) $\log_{\sqrt{2}}\sqrt{2}=1$ |
| (25) $\log 10=1$ | (26) $\log 100=2$ | (27) $\log 1000=3$ | (28) $\log 10000=4$ |
| (29) $\log 10^2=2$ | (30) $\log 10^3=3$ | (31) $\log 10^4=4$ | (32) $\log 10^5=5$ |
| (33) $\log 10^{-1}=-1$ | (34) $\log 10^{-2}=-2$ | (35) $\log 10^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$ | (36) $\log 10^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$ |
| (37) $\log 0.1=-1$ | (38) $\log 0.01=-2$ | (39) $\log\sqrt{10}=\frac{1}{2}$ | (40) $\log\sqrt[3]{10}=\frac{1}{3}$ |
| (41) $\log\frac{1}{10}=-1$ | (42) $\log\frac{1}{100}=-2$ | (43) $\log 10^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}$ | (44) $\log 10\sqrt{10}=\frac{3}{2}$ |

**2.** $\log 1000+\log 100+\log 10+\log 1+\log 0.1=$ 5 。

**3.** $10^{3\log 2}+10^{2\log 3}=$ 17 。

**4.** $\left(10^{\log 2}\right)^3+\left(10^{\log 3}\right)^2=$ 17 。

**5.** 設 $10^x=520$，若 $x=$ log520 。

**6.** 已知 $\log a = 1.23$，則 $\log a^3 =$ <u>3.69</u>。

**7.** 已知 $\log a = 3.62$，則 $\log(100a) =$ <u>5.62</u>。

**8.** 已知甲數的常用數值是5.35，試求：

(1) 若乙數為甲數的10倍，則乙數的常用對數值為 <u>6.35</u>。

(2) 若丙數為甲數的 $\frac{1}{100}$ 倍，則丙數的常用對數值為 <u>3.35</u>。

**9.** 若 $\log a = 3.5$，$\log b = 1.5$，則 $a$ 是 $b$ 的 <u>100</u> 倍。

**10.** 若 $\log a = -3.2$，$\log b = -0.2$，則 $a$ 是 $b$ 的 $\underline{\frac{1}{1000}}$ 倍。

**11.** 已知 $a = \log 2$，$b = \log 5$，則 $10^{a+b+1} =$ <u>100</u>。

**12.** 已知 $a = \log 3$，$b = \log 4$，則 $10^{a-b+2} =$ <u>75</u>。

**13.** 設 $a = \log 2$，$b = \log 3$，試以 $a, b$ 表示 $\log\sqrt{15} =$ $\underline{\frac{1}{2}(b-a+1)}$。

**14.** 已知 $\log 3 = 0.4771$，則 $3^{20}$ 展開後為 10 位數。

**15.** 已知 $\log 6 = 0.7781$，則 $10^{0.7781} \approx 6$，試求 $6^{30}$ 展開後為 24 位數。

**16.** 已知 $\log a = -4.72$，則 $a$ 在小數點後第 5 位開始出現不為零的數字。

**17.** 已知 $\log 2 = 0.3010$，則 $10^{0.3010} \approx 2$，將 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{100}$ 表示為小數，則小數點後第 31 位開始出現不為 0 的數。 $\log 9539$

**18.** 若 $\log 9539$ 的值介於正整數 $n$ 與 $n+1$ 之間，則 $n$ 的值為 3 。

**19.** 已知 $10^{0.3010} \approx 2$，$\sqrt{10} \approx 3.16$，滿足 $n$ 為偶數，且 $0.3 \le \log n < 1.5$ 的整數 $n$ 共有 15 個。

$\boxed{\text{解析}}$：$0.3 \le \log n < 1.5 \Rightarrow 10^{0.3} \le n < 10^{1.5}$

$\because\ 1 < 10^{0.3} < 10^{0.3010} \approx 2$ 且 $10^{1.5} = 10\sqrt{10} \approx 31.6$

$\therefore\ 2 \le n < 31.6$

故滿足條件的整數 $n$ 有 2、4、……、30，共有 15 個

# 焦點 7

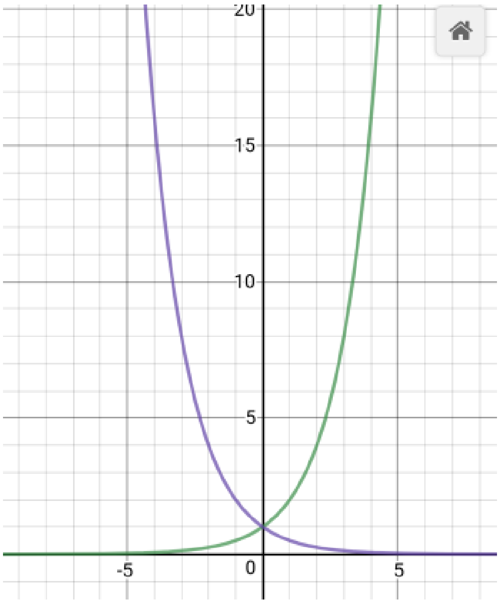
**範圍** 第三冊／指、對數

**內容** 指數函數及其圖形

## 重點整理

**1.** 指數函數的圖形

(1) 指數函數的定義：設 $a>0$，$a\neq 1$，$x$ 是任意實數，我們稱 $y=a^x$ 為以 $a$ 為底數的指數函數。




(2) 當 $a>1$，$y=a^x$ 的圖形由左往右逐漸【 遞增 】。

(3) 當 $0<a<1$，$y=a^x$ 的圖形由左往右逐漸【 遞減 】。

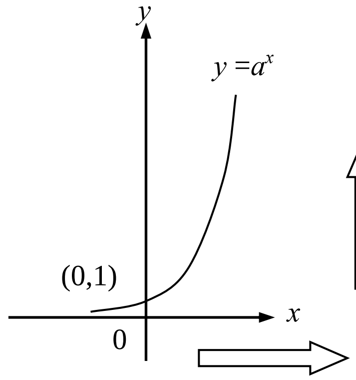
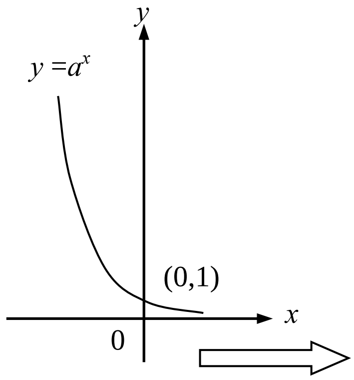
(4) $y=a^x$ 圖形為【凹口向上】，恆在【$x$軸】的【上方】，

且 $a^x>0$ 對一切實數 $x$ 恆成立。

(5) $y=a^x$ 圖形恆與【 $y$ 軸】交於點【 $(0,1)$ 】。

(6) 【 $x$軸 】是 $y=a^x$ 圖形的【漸近線】。

**2.** 指數函數的圖形【進階比較】

| | |
|---|---|
|  |  |
| (1) $f(x)=a^x$ 為【嚴格遞增】函數，<br>即 $\alpha>\beta \Leftrightarrow a^\alpha>a^\beta$。<br>※小口訣：$a>1$，次方越大，其值越大 | $f(x)=a^x$ 為【嚴格遞減】函數，<br>即 $\alpha>\beta \Leftrightarrow a^\alpha<a^\beta$。<br>※小口訣：$0<a<1$，次方越大，其值越小 |

(2) 在 $x$ 軸上方的任一條【水平線】與圖形【恰有一個交點】。

(3) $f(x)=a^x$ 圖形的【凹口向上】( 即 $\dfrac{a^\alpha+a^\beta}{2}>a^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$ )，且為一對一函數。

(4) 函數 $y=a^x$ 與 $y=(\dfrac{1}{a})^x=a^{-x}$ 的圖形對稱於【 $y$ 軸】。

## 精選試題

**1.** 函數 $y=9^x$ 與 $y=3^{3x+2}$ 之圖形的交點坐標為$\underline{(-2,\frac{1}{81})}$。

**2.** 函數 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 與 $y=4^{2x+5}$ 之圖形的交點坐標為$\underline{(-2,4)}$。

**3.** 解方程式：$3^{2x}-4\times3^x-45=0$，則 $x=\underline{2}$。

**4.** 解方程式：$5^{2x}-6\times5^x+5=0$，則 $x=\underline{0或1}$。

**5.** 解方程式：$2^{x+1}-6\cdot2^{x-1}+10\cdot2^{x-2}=12$，則 $x=\underline{3}$。

**6.** 解方程式：$3^{2x}-3^{x+1}=648$，則 $x=$ $\underline{3}$ 。

**7.** 解不等式：$5^{x^2-2}>5^{2x+1}$，則 $x$ 之解 $\underline{x>3 \text{ 或 } x<-1}$ 。

**8.** 解不等式：$3^{x^2-8}<3^{7x}$，則 $x$ 之解 $\underline{-1<x<8}$ 。

**9.** 不等式 $\left(\dfrac{1}{10}\right)^{x^2-3x-1}>0.001$，則 $x$ 之解 $\underline{-1<x<4}$ 。

**10.** 不等式：$(0.25)^{3x^2}<(0.5)^{4x+2}$，則 $x$ 之解 $\underline{x>1 \text{ 或 } x<-\frac{1}{3}}$ 。

**11.** 解不等式：$(0.2)^{x^2-3x-7} > 0.008$，則 $x$ 範圍 $\underline{-2<x<5}$。

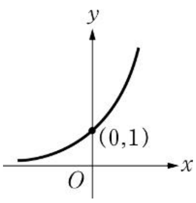
**12.** 解不等式：$\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{2x^2+x+1} > \left(\dfrac{2}{\pi}\right)^{2x-1}$，則 $x$ 範圍 $\underline{x>0 \text{ 或 } x<-\frac{3}{2}}$。

**13.** 比較下列各項的大小：$a=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$、$b=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$、$c=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$。

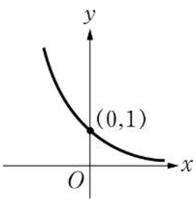
大小順序為：$\underline{a=c>b}$。【90 學測】

**14.** 下列何者為函數 $y=\left(\sqrt{2}\right)^x+1$ 的圖形？$\underline{\text{(E)}}$

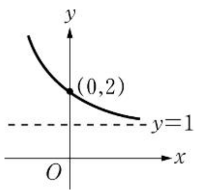
(A)



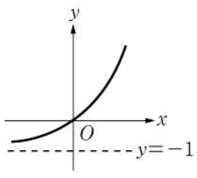

(B)



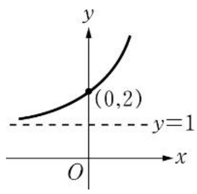

(C)



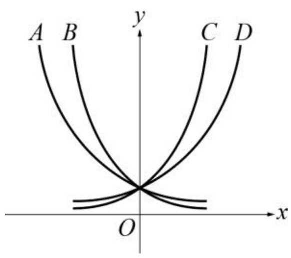

(D)




(E)




**15.** 附圖 $A,B,C,\mathrm{D}$ 分別為指數函數 $y=a^x$，$y=b^x$，$y=c^x$，$y=d^x$ 的部分圖形，則 $a,b,c,d$ 的大小關係為？$\underline{\text{(B)}}$




(A) $a>b>c>d$ (B) $c>d>a>b$ (C) $d>c>b>a$ (D) $c>d>b>a$ (E) $d>c>b>a$

# 焦點8

**範圍** 第三冊／指、對數

**內容** 對數律、對數函數及其圖形

## 重點整理

**1.** 對數律【二】

(1) $\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$ ※小口訣：相乘→相加

(2) $\log_a\left(\dfrac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c$ ※小口訣：相除→相減

(3) **換底公式**：$\log_a b=\dfrac{\log_m b}{\log_m a}$，$\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$ ※小口訣：上者恆上，下者恆下

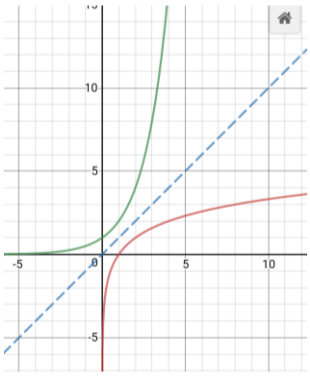
(4) **連鎖法則**：$\log_a b\times\log_b c\times\log_c d=\log_a d$ ※說明：$\dfrac{\log b}{\log a}\times\dfrac{\log c}{\log b}\times\dfrac{\log d}{\log c}=\dfrac{\log d}{\log a}=\log_a d$

(5) **變形公式**：$\boxed{a^{\log_a M}=M}$【←新課綱最不一樣的地方】

【重點整理】對數函數圖形的性質

**2.** 對數函數的定義：設 $a>0$，$a\neq 1$，$x$ 是任意實數，我們稱 $f(x)=\log_a x$ 為以 $a$ 為底數的**對數函數**。

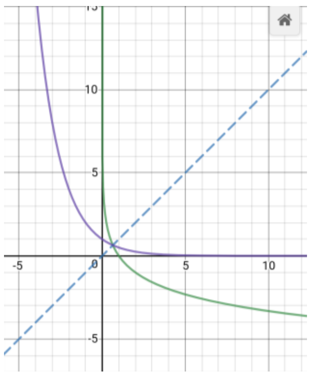
(1) 當 $\boxed{a>1}$，$\begin{cases} y=\log_2 x \\ y=2^x \end{cases}$ 圖形由左往右逐漸【**遞增**】。




**口訣：$a>1$，次方越大，其值越大**

(2) 當 $\boxed{0<a<1}$，$\begin{cases} y=\log_{\frac{1}{3}} x \\ y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x \end{cases}$ 圖形由左往右逐漸【**遞減**】。

**口訣：$0<a<1$，次方越大，其值越小**




(3) $y=\log_a x$ 圖形【**凹口不一定向上**】，且恆在【 $y$ **軸**】的【**上方**】。

(4) $y=\log_a x$ 圖形恆與【 $x$ **軸**】交於點【 $(1,0)$ 】。

(5) $y=\log_a x$ 與 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ 的圖形恆【對稱】於【 $x$ **軸**】。

(6) 【 $y$ **軸**】是 $y=\log_a x$ 圖形的【**漸近線**】。

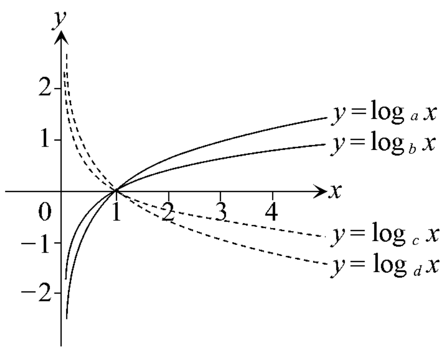
(7) 平行【 $x$ 軸】之任一條【**水平線**】與 $y=\log_a x$ 圖形【**恰有一個交點**】

## 精選試題

**1.** $y=\log_a x$ 與 $y=\log_d x$ 兩圖形對稱於 $x$ 軸，

$y=\log_b x$ 與 $y=\log_c x$ 兩圖形對稱於 $x$ 軸，

則下列何者正確？(B)(C)(E)。




(A) $a>b>c>d$　(B) $b>a>d>c$

(C) $ad=1$　(D) $ac<0$　(E) $abcd=1$

**2.** 求下列敘述何者正確？(A)(B)(D)。

(A) $y=3^x$ 與 $y=3^{-x}$ 的圖形對稱於 $y$ 軸　(B) $y=\log_3 x$ 與 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ 的圖形對稱於 $x$ 軸

(C) $y=3^x$ 與 $y=\log_3 x$ 的圖形對稱於 $y$ 軸　(D) $y=3^{-x}$ 與 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ 的圖形對稱於 $x-y=0$

(E) $y=3^x$ 與 $y=\log_3 x$ 的圖形相交於一點

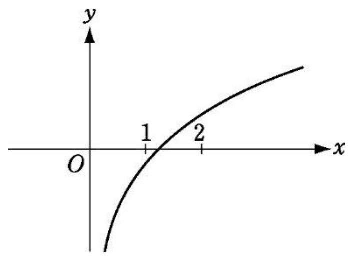
**3.** 已知 $a=\log_2 3$，$b=\log_3 2$，$c=\log_{20} 30$，$d=\log_{30} 20$，$e=\log_{0.3} 0.2$，$f=\log_{0.2} 0.3$，

下列選項何者正確？(A)(B)(C)。【101 學測第一次聯合模擬考】

(A) $a>c$　(B) $a>d$　(C) $b>d$　(D) $e>f$。

**4.** 設 $a=\log_7 4$，$b=\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}} 3$，$c=\log_{\frac{1}{3}} 0.5$，$d=\log_4 7$，則 $a,b,c,d$ 之大小順序為 $b>d>a>c$。

**5.** 右圖為 $y=a+\log_b x$ 之部分圖形，$a,b$ 皆為常數，何者為真？(D)＿＿＿。

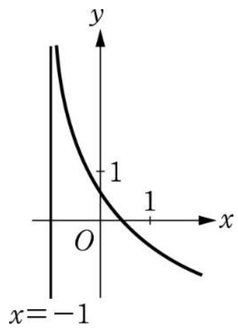



(A) $a<0$，$0<b<1$　(B) $a>0$，$0<b<1$　(C) $a>0$，$b>1$

(D) $a<0$，$b>1$　(E) $a=0,b>1$

**6.** 右圖為 $y=f(x)=a+\log_b(x+c)$ 的圖形，且以 $x=-1$ 為漸近線，

則下列何者正確？(A)(E)＿＿＿。




(A) $a>0$　(B) $b>1$　(C) $c<0$

(D) $a+b+c<0$　(E) $abc>0$

**7.** $\log 3+\log 50+\log 7-\log 105=$ 1＿＿＿。

**8.** 若 $\log_{10}\left(x+\sqrt{6}\right)+\log_{10}\left(x-\sqrt{6}\right)=1$，則 $x=$ 4＿＿＿。

**9.** 若 $\log_2(x-3)=\log_4(x-1)$，則 $x=$ 5＿＿＿。

**10.** 若 $\log_3(x+1)+\log_3(x-7)=\log_3 20$，則 $x=$ 9＿＿＿。

**11.** 若 $2\log_2 x-3\log_x 2+5=0$ ，則 $x=$ $\underline{\frac{1}{8}\text{ 或 }\sqrt{2}}$ 。

**12.** 解不等式 $\log_2(x-1)<1+\log_4(x+2)$ ，則 $x$ 之解 $\underline{1<x<7}$ 。

**13.** 解不等式 $2\log_{0.1}(x+2)>\log_{0.1}(2x+12)$ ，則 $x$ 之解 $\underline{-2<x<2}$。

**14.** $\log_7 16\times\log_{25}49\times\log_4 9\times\log_{27}125=$ $\underline{4}$ 。

**15.** $2\log_4\frac{6}{7}+\log_4\frac{14}{3}+\log_4\frac{28}{15}-\log_4\frac{2}{5}=$ $\underline{2}$ 。

**16.** $(\log_5 2+\log_{125}8)(\log_4 0.2+\log_{\sqrt{2}}25)=$ $\underline{7}$ 。

**17.** $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_3\left(\log_2 x\right)\right)=-1$ ，則 $x=$ $\underline{512}$ 。

易啟考上・易起到頂標

96330005-34